

# Umbætur á kosningakerfinu:

## IV. Útdeiling jöfnunarsæta

**Porkell Helgason**, fyrrv. prófessor í stærðfræði

Pistill þessi er sá síðasti af fjórum pistlum sem koma í kjölfar yfirlitsgreinar um viðfangsefnið (Porkell Helgason 2015a). Athygli skal vakin á því að töflur, myndir og athugasemdir aftanmáls eru tölusett í áframhaldandi röð frá einum pistlinum til annars.

Með kosningalögum þeim sem komu til framkvæmda 1934 var þingsætum skipt í tvo hópa, kjördæmissæti og jöfnunarsæti (þá nefnd uppþótarsæti). Kjördæmissætunum var og er alfarið úthlutað á grundvelli úrslita innan hvers kjördæmis en jöfnunarsætum er úthlutað innan hvers kjördæmis með tilliti til úrslita á landinu öllu. Allt til kosninganna 1987 gat tala sæta hvers kjördæmis sveiflast talsvert allt eftir úrslitunum í heild. Frá og með kosningunum 1987 er það á hinn bóginn lögbundið og ljóst fyrir hverjar kosningar hve mörg sæti hvert kjördæmi skal frá.<sup>16</sup>

Ástæður þess að sætatalan var fastsett í hverju kjördæmi með stjórnarskrárbreytingunni 1984 voru tvær.<sup>17</sup> Önnur ástæðan var sú að það var viðkvæmismál að verið var að fækka kjördæmissætum minnstu kjördæmanna. Jöfnunarsætin áttu því að virðast ígildi kjördæmissæta, enda tala þeirra bundin í hverju kjördæmi. Til að undirstrika þetta fengu jöfnunarsætin ekki sérstakt heiti í umræddum lögum. Í lokamgr. 1. gr. fyrrgreindra laga nr. 65/1984 um breytingu á 31. gr. stjórnarskrárinnar segir einungis að í þeim tilgangi að ná jöfnuði milli þingflokka sé „heimilt að úthluta allt að fjórðungi þingsæta [hvers kjördæmis] með hliðsjón af kosningaúrslitum á landinu öllu.“ Hin ástæða þess að tala jöfnunarsæta hvers kjördæmis var niðurnjörvuð var sú að halda skyldi misvægi atkvæða innan gefinna marka. Áður gat það gerst að jöfnunarsæti gátu hrúgast saman í fámenum kjördæmum og þar með aukið á misvægið.

Útdeiling jöfnunarsæta til einstakra lista er flókið viðfangsefni og var eitt örðugasta úrlausnarefnið við breytingarnar sem stóðu yfir árin 1983-1987.<sup>17</sup> Þegar hér er komið sögu í úthlutun þingsæta er vitað hvernig jöfnunarsætin eiga að skiptast á milli flokkanna og hve mörg jöfnunarsæti (eitt eða tvö samkvæmt núgildandi lögum) eiga heima í hverju kjördæmi. Jafnframt er það sjálfgefið markmið að jöfnunarsæti hvers kjördæmis séu eftir föngum í samræmi við atkvæðastyrk, séu sem sagt sem líkust því að vera framhald af úthlutun kjördæmissæta. Þetta markmið stangast einatt á við hinar gefnu forsendur um sæti hvers flokks og hvers kjördæmis.

Í grundvallaratriðum er útdeiling jöfnunarsæta viðfangsefni kosningalaga á öllum Norðurlöndunum, nema í Finnlandi þar sem ekki eru nein jöfnunarsæti. Fyrirkomulagið í Skandinavíu, en þó einkum Noregi, svipar mjög til þess sem er hér á landi.

Þetta viðfangsefni, tvívið úthlutun sæta þar sem fyrir liggja takmarkanir á tvenna vegu (summur sæta hvers kjördæmis og hvers flokks), hefur í vaxandi mæli verið til umræðu meðal fræðimanna síðustu áratugi. Brautryðjendur voru þeir Balinski og Demange (1989a og 1989b). Þeir stilla upp gæðakröfum sem sérhver útdeilingaraðferð jöfnunarsæta ætti að uppfylla. Með „aðferð“ er þá átt við heilsteypt fyrirmæli um hvernig úthluta skuli sætum til einstakra lista hvort sem kjördæmin eru eitt eða fleiri, flokkar margir eða fáir. Þessar eru gæðakröfurnar til sanngjarnrar úthlutunaraðferðar:

- *Grunnkröfur*. Nokkrar einfaldar, rökfræðilegar kröfur sem vart ættu að vera umdeilanlegar. Skulu þær því ekki tíundaðar hér.
- *Kjörfylgi og þingfylgi haldist í hendur*. Listi skal aldrei tapa sætum á því að auka fylgi sitt, að öllu öðru óbreyttu, og öfugt, minnki fylgið. Með öðrum orðum skal listi ekki fá færri sæti ef bætt er við fylgi hans og síðan úthlutað á ný. Og að sama skapi skal sætum lista aldrei fjölga lækki atkvæðatala hans.
- *Innra samræmi aðferðarinnar*. Úthlutunaraðferðin skal vera sjálfri sér samkvæm í eftirfarandi skilningi: Gerum ráð fyrir að fyrst sé öllum sætum úthlutað, en síðan fari fram endurúthlutun í nokkrum (e.t.v. öllum) kjördæmunum og hugsanlega séu þá ekki allir flokkarnir með í leik (e.t.v. þó allir). Atkvæði og sæti einstakra lista, sem endurúthlutunin snertir ekki, eru áður fjarlægð. Krafan til innra samræmis mælir fyrir um að þessi endurúthlutun breyti í engu hinni upphaflegu úthlutun, enda sé beitt sömu aðferð við endurúthlutunina og við þá upphaflegu.

Ætla verður að flestir séu því sammála að þessar kröfur séu edlilegar og að stefna beri að því að þær séu almennt uppfylltar í kosningakerfum. Að því gefnu að útteilingin skuli grundvallast á tiltekinni deilireglu (svo sem Sainte-Laguë eða d'Hondt) ná þeir Balinski og Demange að sanna að til er ein og aðeins ein aðferð til útteilingar sæta svo að tryggt sé að gæðakröfurnar séu ávallt uppfylltar. Þessi aðferð er þannig í þeim skilningi „best“ og verður hér eftir nefnd svo eða líka *gæðaaðferðin*. Allar aðrar aðferðir eru lakari að því leytnu að ekki er tryggt að fyrrgreind skilyrði séu ávallt uppfyllt.

Hængurinn á hinni gæðaaðferðina er sá að henni verður ekki beitt með nema með allflókinni útfærslu sem kallar á ítrun, þ.e. tilraunaúthlutun sem síðan er endurbætt með frekari tilraunum þar til besta lausnin er að lokum fundin. Unnt er að sanna stærðfræðilega að sérhver úthlutunaraðferð, sem ætíð tryggir að gæðalausnin finnist, verður óhjákvæmilega að fela í sér slíkar ítranir. Greinarhöfundur og sænskur félagi hans hafa þó bent á aðferð til að finna þessa bestu lausn með mjög hefðbundinni reikniáðferð, línulegri bestun (Helgason, Jörnsten 1994 og Helgason, Jörnsten, Migdals 1995). Útgangspunkturinn í þeirri aðferðafræði var raunar ekki sá að uppfylla einhverjar gæðakröfur heldur að túlka sanngjarna útteilingu sæta með vísun til lágmörkunar óreiðu (e. entropy) eins og tíðkast á mörgum sviðum, t.d. í tölfræði og edlisfræði. Þegar upp var staðið kom í ljós að um var að ræða aðferð sem uppfyllir gæðakröfur Balinskis og Demange.

Það má heita viðtekin grunnregla í kosningakerfum að öll úthlutun sæta verði að byggjast á *seilingu* (e. greedy method), þ.e. að sætum sé útteilt einu á eftir öðru í fallandi röð tiltekens mælikvarða (t.d. atkvæða að baki sæti). Jafnframt að sæti, sem þegar hefur verið útteilt, verði ekki kölluð til baka. Gæðaaðferðin getur aldrei verið af þessum toga. Að vísu er stærðfræðileg lýsing á aðferðinni næsta einföld: Leitað er að þeirri niðurröðun sæta (í okkar tilfalli einvörðungu jöfnunarsæta) sem gerir heildarmargfeldi atkvæða að baki hverjum manni sem hæst (enda sé d'Hondts-regla lögð til grundvallar). Hugsanlegt væri að lýsa ekki aðferðinni sjálfri í kosningalögum, heldur aðeins þessu markmiði um hámarks margfeldis. Þá yrði þingheimur að treysta því að það er aðeins til ein leið til að ná því markmiði. Athyglisvert er að þessi mjög svo stærðfræðilega gæðaaðferð hefur haslað sér völl í Sviss, fyrst í kantonukosningum í Zürich (Pukelsheim og Schuhmacher 2004) og er nú til umræðu víðar í landinu.

Eins og vænta má af framangreindu verður ekki tryggt að úthlutun samkvæmt ákvæðum núgildandi kosningalaga uppfylli fyrrgreindar gæðakröfur. Til þess eru þau of einföld!<sup>18</sup> Til fróðleiks er sýnt í 9. töflu hvernig og hvers vegna úthlutunin 2003 – skv. núgildandi lögum – vísar frá gæðalausninni. Kosningarnar 2003, fremur en þær síðari, eru teknar sem dæmi þar sem þá er frávík frá gæðalausninni minna en í öðrum á þessari öld og samanburður lausnanna því gegnsærri. Einungis fjórir listar koma hér við sögu, hjá

tveimur flokkum og í tveimur kjördæmum. Hjá öllum öðrum listum fellur raunúthlutunin saman við þá bestu. Vítaskuld getur frávik tveggja úthlutana aldrei orðið minna en svo að það snerti fjóra lista.

**9. tafla.** Samanburður á raunúthlutun 2003 við bestu úthlutun.

Úthlutun sæta (kjördæmis- og jöfnunarsæti)	Samkvæmt lögum		Gæðalausnin	
<i>Listabókstafir:</i>	B	S	B	S
Suðurkjördæmi	2	4	3	3
Reykjavíkurborg, norður	2	4	1	5
Atkvæði að baki síðasta sæti	Samkvæmt lögum		Gæðalausnin	
<i>Listabókstafir:</i>	B	S	B	S
Suðurkjördæmi	2.967	1.857	1.978	2.475
Reykjavíkurborg, norður	2.100	3.278	4.199	2.622
Margfeldi reitanna fjögurra	37.902.781.266.699		53.906.177.801.528	
Hlutfallsleg hækkun atkvæðamargfeldisins			42%	

Í efri hluta töflunnar er annars vegar sýnt í vinstri helmingi hennar hvernig sæti skiptust í raun á milli listanna fjögurra sem við sögu koma. Hægra megin er sätaskiptingin samkvæmt gæðaaðferðinni. Þá er sýnt hver voru atkvæði að baki síðasta kjörna manni við báðar útteilingarnar. Í kjölfarið koma risatölur sem eru margfeldi atkvæða að baki þessum síðustu mönnum. Í ljós kemur að margfeldið eykst um 42% við gæðalausnina. Það er sönnun þess – samkvæmt fyrrgreindri stærðfræði – að gæðaúthlutunin er betri.

Teljast óhjákvæmilegt að úthlutun sæta byggist á seilingu, en um leið að niðurstaðan verði sem líkust þeirri bestu, verður að leita nálgunarlausna. Um þetta viðfangsefni hefur lítið verið fjallað í fræðaheiminum. Svo vill þó til að viðfangsefnið er alþekkt í bestunarfræðum, enda af toga margra almennra útteilingar- og pörunarvandamála. Áður en tölvur urðu jafnöflugar og nú var einatt leitað að nálgunarlausnum í slíkum viðfangsefnum þar sem tölvur og reiknirit réðu ekki eða vart við að finna bestu lausnina sjálfa. Höfundur hefur leitað á þessi mið við leit að nálgunarlausnum á sætaútteilingu sem komist sem næst bestu lausninni en byggist samt á samfelldum skrefum fram á við, þ.e. seilingu. Hefur verið staldrað við eina nálgunaraðferð sem höfundur hefur kennt við *forskot*. Aðferðin hefur verið þróuð áfram og verður sú gerð hér nefnd *aðferð forskots á varamann*. Í báðum tilvikum er fyrirmynd sótt í gamla nálgunarlausn á svonefndu flutningavandamáli (e. transportation problem); sjá Reinfeld og Vogel 1958, en aðferðin er venjulega kennd við þann síðarnefnda.

Kjarni forskotsaðferðar er eftirfarandi:

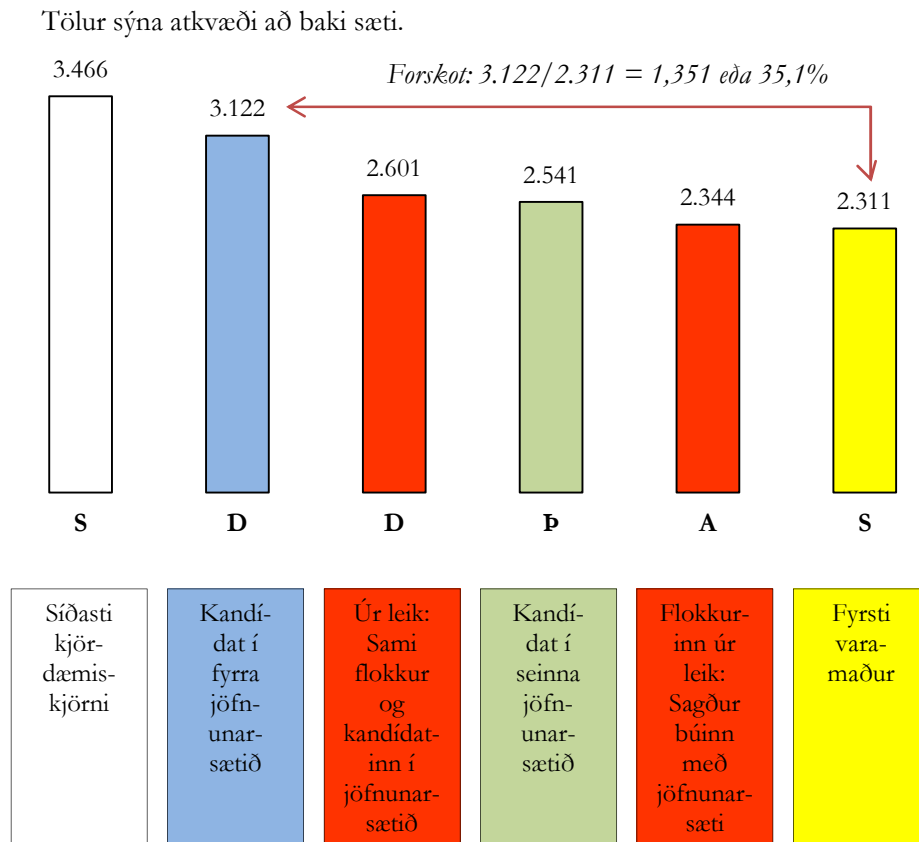
### Forskot á varamann

1. Á hverju stigi úthlutunar jöfnunarsæta skal eftirfarandi liggja fyrir í hverju þeirra kjördæma sem ekki hefur enn fengið fulla tölu jöfnunarsæta:
  - a. Reiknuð skal atkvæðatala næstu kandiðata þeirra lista sem enn eiga rétt á jöfnunarsæti.
  - b. Innan hvers kjördæmis skal raða kandiðötunum í laus sæti í fallandi röð eftir atkvæðatölu þeirra allt þar til fundinn er fyrsti varamaður hvers kjördæmis, en þó með eftirfarandi fyrirvörum:
    - i. Hjá þeim lista sem á sterkasta kandiðatinn í laust jöfnunarsæti skal hlaupið yfir þá kandiðata listans sem á eftir kunna að koma.<sup>19</sup>
    - ii. Hlaupið skal yfir lista þegar flokkur hans á ekki lengur tilkall til jöfnunarsæta.
  - c. Reiknað skal hlutfall atkvæðatölu þess efsta í þessari ímynduðu úthlutun á móti atkvæðatölu fyrsta varamanns. Þetta hlutfall nefnist *forskot efsta manns á varamann*.
2. Sæti skal úthlutað til þess lista sem á þann efsta mann kjördæmis sem hefur hæst forskot á fyrsta varamann kjördæmisins.
3. Þessi skref skulu endurtekin þar til öllum jöfnunarsætum hefur verið úthlutað.

Hugsunin að baki aðferðinni er afar einföld. Reynt er að komast hjá „slysum“, þ.e. þeim að grípa þurfi til kandiðats í jöfnunarsæti með lítið fylgi. Hér er sjónarmiðið það sama og lagt er til grundvallar reglu d'Hondts, sbr. það sem fyrr segir um grundvallareiginleika hennar. Mælikvarðinn á slysalíkurnar er þetta umrædda forskot. Ef sá sem hefur mesta forskotið hlýtur ekki jöfnunarsæti er eins víst að síðar í úthlutunarferlinu verði fyrir valinu kandiðat, varamaðurinn, sem er mun lakari. Forskotið er mælt sem hlutfall en t.d. ekki sem atkvæðamunur. Fyrir því eru einkum tvenn rök. Annars vegar að þá skiptir mismunandi stærð kjördæma eða annað misvægi þeirra á milli engu máli og hins vegar það sem þegar hefur verið sagt, að í kosningastærðfræði allri hefur margfeldi og deiling visst fræðilegt forskot á samlagningu og frádrátt. Spyrja má hvort ekki mætti allt eins mæla forskot frambjóðenda innan hvers flokks eða jafnvel bæði innan kjördæma og flokka. Það væri í fullu samræmi við hliðstæðuna hjá Vogel. Reiknitilraunir benda þó til að ávinningur af því væri lítill en flækjustigið talsvert meira.<sup>20</sup>

Á 2. mynd er sýnt hvernig umrætt forskot á varamann er reiknað í einu kjördæmanna samkvæmt úrslitum 2013. Kjördæmið og aðrar forsendur er valið þannig að það reyni á öll fyrrgreind afbrigði forskotsreglunnar.

**2. mynd.** Útreikningur á forskoti fyrra jöfnunarmannsins af tveimur á fyrsta varamann í Suðvesturkjördæmi 2013.



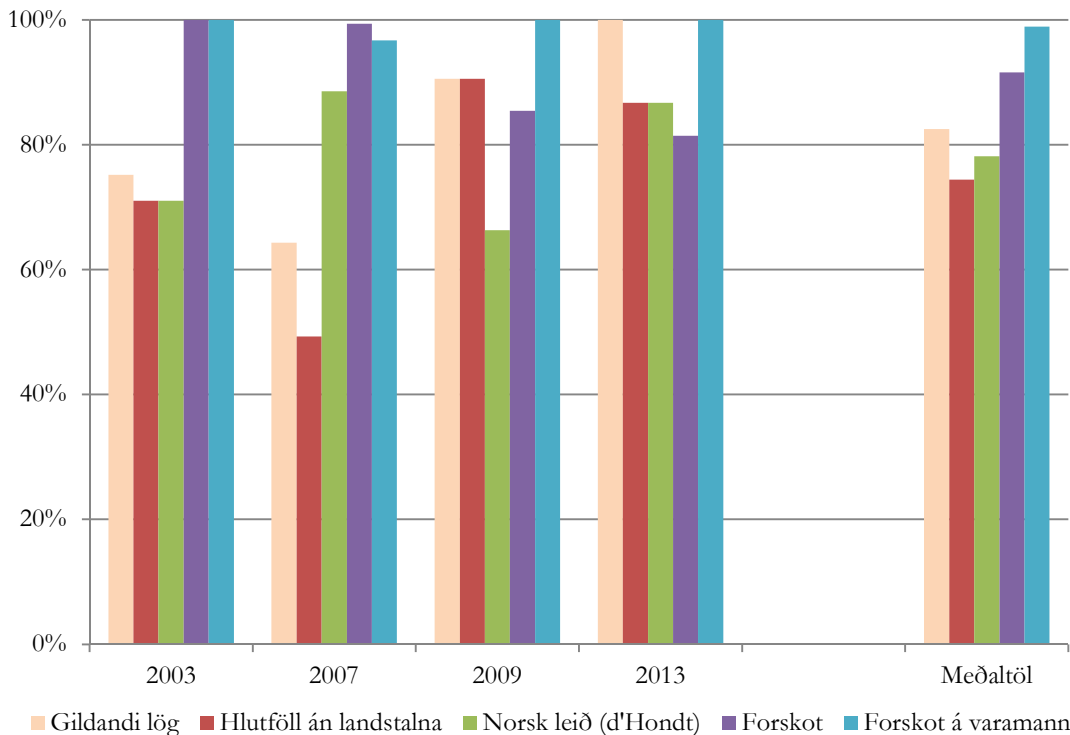
Frekari skýring á 2. mynd:

- Í kjördæminu eru ellefu kjördæmissæti og tvö jöfnunarsæti. Síðasti kjördæmiskjörni maðurinn er frá S-lista með 3.466 atkvæði að baki sér eins og sýnt er á myndinni. B-listinn á ekki rétt á jöfnunarsætum og kemur því ekki frekar við sögu. Að lokinni úthlutun kjördæmissæta er D-listinn með sterkasta kandídatinn í jöfnunarsæti. Atkvæði að baki honum eru 3.122.
- Næststerkasti jöfnunarkandídatinn er raunar líka hjá D-lista. En samkvæmt aðferðinni ber að láta mann af sama lista og þess efsta liggja á milli hluta, sbr. reglu 1-b-i. Kandídat í annað jöfnunarsætið er því sá af Þ-lista með 2.541 atkvæði.
- Nú er sterkasti kandídat í (fyrsta) varamannssæti sá frá A-lista, með 2.344 atkvæði. En í þessu dæmi er gert ráð fyrir að flokkur listans hafi, þegar hér er komið sögu, hlotið öll sín jöfnunarsæti. Því er einnig hlaupið yfir þennan kandídat, sbr. reglu 1-b-ii. Þar með er frambjóðandi S-listans – með 2.311 atkvæði – sá sem hér kemur til álitu sem fyrsti varamaður.
- Sterkasti kandídatinn í kjördæminu hefur því forskot á varamanninn sem mælist sem hlutfallið  $3.122/2.311 = 1,351$  sem má líka orða sem 35,1% forskot. Ef það er mesta forskotið á landinu er jöfnunarsæti nú úthlutað til D-listans í Suðvesturkjördæmi.

Á 3. mynd eru bornar saman ýmsar aðferðir við útdeilingu á jöfnunarsætunum. Auk nógildandi laga og forskotsaðferðanna beggja eru sýnd tvö tilbrigði við nógildandi lög. Í öðru þeirra er sleppt því ákvæði nógildandi laga að jöfnunarsætum skuli úthlutað í röð svokallaðra landstalna, en með þeim er mældur forgangur hvers flokks til sætanna.<sup>21</sup> Þar með byggir úthlutunin í þessari gerð einvörðungu á hlutfallslegum styrk hvers lista innan síns kjördæmis. Í hinu tilbrigðinu, sem sýnt er á myndinni, er úthlutað í anda norskra kosningalaga sem tóku gildi haustið 2002, þ.e. tveimur árum síðar en þau íslensku.<sup>22</sup> Þar eru heldur engar landstölur en jöfnunarsætum alfarið úthlutað á grundvelli styrks hvers einstaks lista (en að sjálfsögðu innan þess ramma hvað mörg sæti eiga að koma í hlut hvers kjördæmis, þ.e. fylkis, og til hvers flokks). Í norsku lögunum er styrkur listanna ekki mældur sem hlutfall af gildum atkvæðum í hverju kjördæmi, eins og í íslensku ákvæðunum, heldur sem sætishlutir en þeir fást með því að kvarða hlutföllin með tölu þeirra þingsæta sem úthluta skal. Til að gera samanburð við íslensku lögin raunhæfari er regla d'Hondts hér lögð til grundvallar en ekki regla Sainte-Laguës eins og er í norsku frumgerðinni.

Því má skjóta inn í að full ástæða væri til að taka upp þessa kvörðun að hætti Norðmanna. Þegar nógildandi íslensk kosningalög komu fyrst til framkvæmda með kosningunum 2003 höfðu kjördæmin (nánast) sömu tölu þingsæta. Undir þeim kringumstæðum skiptir kvörðunin ekki máli og því var hún ekki tekin upp í lögin. Aftur á móti hefur tilfærsla sæta milli kjördæma riðlað þessu. Þess má þó geta að kvörðunin væri óþörf yrði forskotsaðferðin notuð en segja má að kvörðunin sé þar innbyggð.

### 3. mynd. Nálgun ýmissa aðferða að bestu lausn.<sup>23</sup>



Forskotsaðferðirnar báðar gefa greinilega betri niðurstöður en aðrar þær sem sýndar eru, þ.m.t. úthlutun samkvæmt nógildandi lögum. Hin endurbætta forskotsregla, *forskot á varamann*, hittir í mark í þrennum af þeim fenum kosningum sem prófaðar hafa verið, þ.e. þeim frá og með 2003. Undantekningin eru kosningarnar 2007 en þá er lausnin sem fæst með forskoti á varamann engu að síður næsta jafn góð þeirri bestu eins og ráða má af hæð bláu súlunnar sem svarar til ársins 2007 á myndinni.

Hér á undan hefur verið farið yfir hugsanlegar betrubætur á úthlutun jöfnunarsæta. Þá er þegiandi og hljóðlaust gengið út frá því að sætum sé fyrirfram skipt upp í kjördæmis- og jöfnunarsæti. Hvort tala jöfnunarsæta er 9, eins og nú, eða einhver önnur tala, svo sem leyfða hámarkið 27, skiptir þó ekki máli. Aftur á móti er úthlutun jöfnunarsætanna hér hugsuð sem útfærsla á þeirri uppskiptingu sæta sem nefnd er aljöfnun hér framar. Yrði hin grunnleiðin fyrir valinu, lágmarksleiðin, má hæglega aðlaga forskotsaðferðina að henni.

Eins og fyrr segir er nálgunaraðferðum oft beitt í bestunarfræðum þegar besta lausnin er torfundin. Oftast er ástæðan sú að besta lausnin verður ekki fundin innan skynsamlegra tímamarka og það þótt beitt sé öflugum tölum. Í því tilfelli sem hér um ræðir, besta útteiling jöfnunarsæta, er ástæðan önnur, sem sagt sú að ekki þyki boðlegt að hafa lýsingu á þeirri bestunaraðferð í lagatexta. Nálgunaraðferðir eru einatt misgóðar og misflóknar. Að jafnaði eru þær því betri þeim mun flóknari sem þær eru. Með *forskot á fyrsta varamann* er farinn meðalvegur; flækjustiginu er stillt í hóf. Til þess að unnt sé að fullyrða að aðferðin sé góð nálgun á bestu lausninni þyrfti þó að gera ítarlegri reiknilitraunir en þær sem hér hefur verið lýst. Það verkefni er framundan.

## Athugasemdir

16. Bindingu jöfnunarsæta er stundum kennt um það að sæti hrökkvi til og frá við talningu á kosninganótt. Þau gerðu það líka áður þegar þau voru lausbundnari, en því var ekki veitt athygli þar sem allir útreikningar á jöfnunarsætum voru látnir bíða lokatalna áður fyrr; fyrir daga tölva og sjónvarps.
17. Byggt á Morgunblaðsgrein höfundar (Þorkell Helgason 1987) en einnig á athugasemdum með frumvarpinu að stjórnarskrárbreytingunni 1984; sjá Alþingistíðindi 1982-83, 105. löggjafarþing. A: 2329. Jafnframt vísast til 6. aftanmálgreinar.
18. Dæmi um að kosningalögin gangi á svig við grunnkröfurnar um innra samræmi, svo og þá um að kjörfylgi og þingfylgi haldist í hendur, er aftur að finna í 11. undirkafla í greiningu á kosningunum 2003, sjá Þorkell Helgason 2013.
19. Fáir listinn ekki sinn sterkasta mann kjörinn, vegna þess að listinn er orðinn uppiskroppa með jöfnunarsæti þegar kjördæmið á næst leik, fær listinn heldur engan lakari kandiðat kjörinn.
20. Í 17. undirkafla í fyrrgreindri greiningu á kosningunum 2003 er því nánar lýst á hvaða fræðilega grundvelli forskotsaðferðin byggir; sjá þar einkum 28. neðanmálgrein.
21. Sjá 2. og 3. mgr. 108 gr. laga um kosningar til Alþingis, nr. 24/2000. Vefútgáfa Lagasafns, slóð <http://www.althingi.is/lagas/nuna/2000024.html>.
22. Sjá § 10-9 í Lov om valg til Stortinget, fylkesting og kommunestyre (valgloven), lov 2002-06-28-57. Vefslóð [http://lovdata.no/dokument/NL/lov/2002-06-28-57#KAPITTEL\\_11](http://lovdata.no/dokument/NL/lov/2002-06-28-57#KAPITTEL_11).
23. Frávikið er mælt sem hlutfallið milli logra (lógaritma) heildarmargfeldis atkvæða að baki sæta í viðkomandi aðferð á móti sama logra margfeldis í bestu lausn. Ekki má leggja of mikið upp úr talnagildum þessa mælikvarða, heldur er það samanburðurinn sem skiptir máli.

Vefslóðir voru síðast sóttar 14. október 2014.

## Heimildir

*Alþingistíðindi*. Reykjavík. Skrifstofa Alþingis.

- Balinski, M. L. og Demange, G. 1989a. „An axiomatic approach to proportionality between matrices.“ *Mathematics of Operations Research*, 14 (1989) 700-719.
- Balinski, M. L. og Demange, G. 1989b. „Algorithms for proportional matrices in reals and integers“ *Mathematical Programming*, 45 (1989) 193-210.
- Pukelsheim, F., Schuhmacher, Ch. 2004. „Das neue Zürcher Zuteilungsverfahren für Parlamentswahlen“ *Aktuelle Juristische Praxis – Pratique Juridique Actuelle*, 5 (2004) 505-522.
- Pukelsheim, Friedrich 2014. *Proportional Representation Apportionment Methods and Their Applications*. Cham: Springer.
- Reinfeld, N.V., Vogel, W.R. 1958. *Mathematical Programming*, 59–70. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Þorkell Helgason 1987. „Ný kosningalög. Réttarbót, en með annmörkum“, *Morgunblaðið*, 7. mars 1987. Vefslóð  
[http://timarit.is/view\\_page\\_init.jsp?issId=121081&pageId=1651148&lang=is&q=%DEorkell%20Helgason](http://timarit.is/view_page_init.jsp?issId=121081&pageId=1651148&lang=is&q=%DEorkell%20Helgason).
- (Þorkell) Helgason, Jörnsten, Kurt 1994. „Entropy of Proportional Matrix Apportionments“, *Norges Handelshøyskole*, working paper 4/94 (1994).
- (Þorkell) Helgason, Jörnsten, K, Migdalas, A. 1995. „Maxmin formulation of the apportionments of seats to a parliament“, in *Minimax and Applications*, Du, D and Pardalos, P.M. eds 1995, pp 371-401 Dorceht: Kluwer Academic Publishers.
- Þorkell Helgason 2013. „Greining á úthlutun þingsæta eftir alþingiskosningarnar ...“. Skýrslur á vegum landskjörstjórnar um þingkosningarnar 2003, 2007, 2009 og 2013. Vefslóðir <http://www.landskjoer.is/media/frettir/Greining2003endurbaett2013.pdf>, <http://www.landskjoer.is/media/frettir/Greining2009endurbaett2013.pdf> og <http://www.landskjoer.is/media/frettir/Greining2013nov.pdf>.
- Þorkell Helgason 2015a. „Umbætur á kosningakerfinu: Yfirlit“. Vefslóð  
<http://thorkellhelgason.is/?p=2086>.
- Þorkell Helgason 2015b. „Umbætur á kosningakerfinu: I. Jöfnun atkvæðavægis“. Vefslóð“. <http://thorkellhelgason.is/?p=2102>.
- Þorkell Helgason 2015c. „Umbætur á kosningakerfinu: II. Jöfnuður milli flokka“. Vefslóð <http://thorkellhelgason.is/?p=2124>.
- Þorkell Helgason 2015d. „Umbætur á kosningakerfinu: III. Úthlutunarreglur“. Vefslóð  
<http://thorkellhelgason.is/?p=2144>